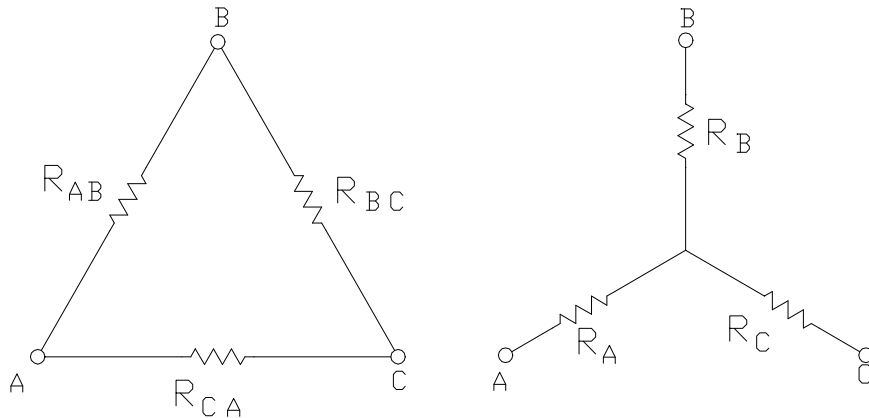


COLLEGAMENTO A STELLA E A TRIANGOLO

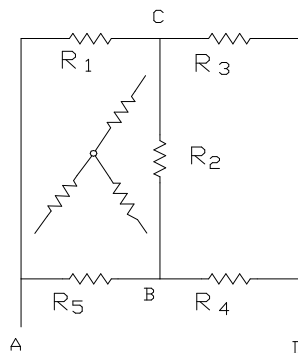
Oltre ai collegamenti serie e parallelo esistono anche altri modi di collegamento. Per le loro frequenti applicazioni risultano importanti due collegamenti dei quali ci occuperemo in questo paragrafo: il collegamento a stella ed il collegamento a triangolo.



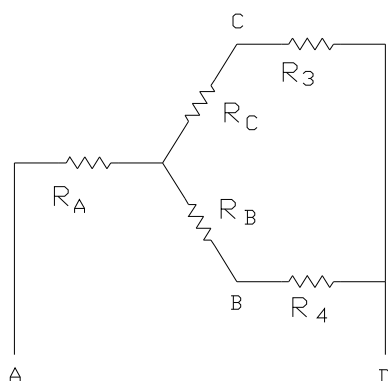
Tre resistori sono collegati a stella se formano un collegamento aperto con un punto in comune che prende il nome di centro stella.

Risultano collegati a triangolo tre resistori che formano un circuito chiuso.

Rispetto ai nodi A, B e C questi due collegamenti non rappresentano ne una serie e nemmeno un parallelo. Tuttavia a volte sono inseriti in particolari circuiti elettrici resi, quindi, di difficile semplificazione. Come esempio consideriamo il circuito della figura:



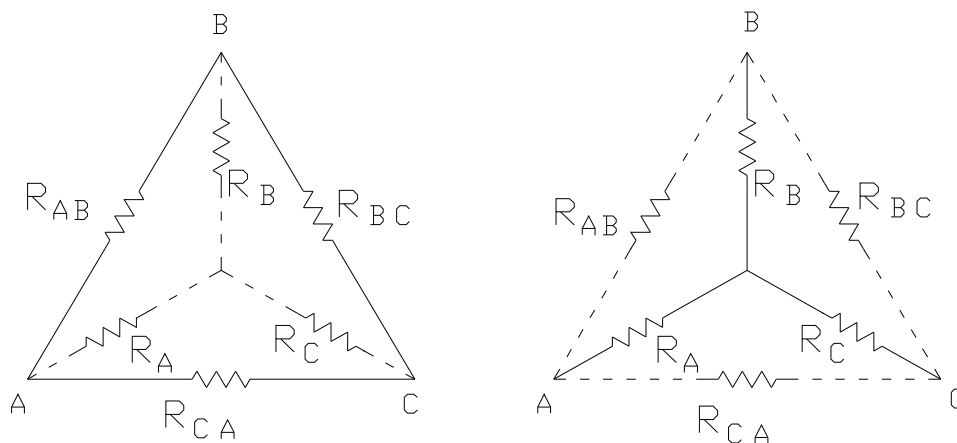
Dai punti A, D il circuito non risulta semplificabile come abbiamo già visto nel caso dei collegamenti misti tra resistori. In esso non vi sono, infatti, né collegamenti in serie né in parallelo. Sono però evidenti i collegamenti stella e collegamenti triangolo; costituiscono una stella le terne dei resistori R_5 , R_2 , R_4 e R_1 , R_2 , R_3 sono invece triangoli le terne R_1 , R_2 , R_5 e R_2 , R_3 , R_4 . Se fosse possibile sostituire il triangolo R_1 , R_2 , R_5 con una stella ad esso equivalente otterremmo il seguente circuito:



In questo nuovo circuito sono facilmente identificabili i collegamenti serie tra R_C ed R_3 e tra R_4 ed R_B . Realizzando poi un parallelo ed una serie finale possiamo facilmente calcolare la R_{eq} tra A e D. La sostituzione tra un triangolo ed una stella ha portato alla semplificazione del circuito. Questa sostituzione risulta quindi vantaggiosa, almeno nel caso preso in esame. In generale comunque sono parecchi i casi in cui può servire la sostituzione tra un triangolo ed una stella ed viceversa. Vediamo ora come è possibile determinare i valori di R_A R_B R_C e di R_{AB} R_{CA} R_{BC} nei due casi.

TRASFORMAZIONE STELLA - TRIANGOLO E TRIANGOLO - STELLA

Il problema che vogliamo risolvere è quello della sostituzione tra il triangolo e la stella mostrati nella figura in modo tale che la resistenza equivalente tra le coppie di punti A-B ; B-C ; A-C rimanga inalterata.



Cominciamo con il considerare la coppia di punti A-B. La resistenza equivalente “vista” da questi due punti è, per il triangolo pari a R_{AB} con in parallelo la serie tra R_{CA} e R_{BC} . Dagli stessi due punti la stella mostra una R_{eq} pari alla somma tra R_A e R_B .

Per chiarire meglio queste affermazioni facciamo riferimento alle figure seguenti.

$$R_{eq} = R_{AB} // R_{CA} + R_{BC} = R_{AB}$$

$$R_{eq} = R_A + R_B = R_{AB}$$

Potremo sostituire la stella al triangolo quando le due R_{eq} saranno uguali, in questo caso, infatti un eventuale parte di circuito connessa tra A e B non “si potrà accorgere” della sostituzione tra i due circuiti dato che, rispetto ai punti A e B non è mutato il valore resistivo. L’equivalenza si traduce quindi nella seguente uguaglianza:

$$\frac{R_{AB} \times (R_{CA} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} = R_A + R_B$$

Operando in modo analogo rispetto alle coppie A-C e B-C otteniamo

$$\frac{R_{CA} \times (R_{AB} + R_{BC})}{R_{CA} + R_{AB} + R_{BC}} = R_A + R_C \qquad \frac{R_{BC} \times (R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} = R_B + R_C$$

Dato che l'obiettivo iniziale consiste nella sostituzione del triangolo con una stella è evidente che i termini R_{AB} , R_{BC} , R_{CA} sono noti e che le incognite sono R_A , R_B , R_C .

D'altro canto le equazioni scritte costituiscono un sistema in tre equazioni e tre incognite rispetto a R_A , R_B , R_C che risultano facilmente determinabili.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_{AB} \times (R_{CA} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} = R_A + R_B \\ \frac{R_{CA} \times (R_{AB} + R_{BC})}{R_{CA} + R_{AB} + R_{BC}} = R_A + R_C \\ \frac{R_{BC} \times (R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} = R_B + R_C \end{array} \right.$$

Come procedere per la soluzione? Non è poi così complicato come sembra; cominciamo con il fare la somma tra le prime due equazioni:

$$\frac{R_{AB} \times (R_{CA} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} + \frac{R_{CA} \times (R_{AB} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} = R_A + R_C + R_B + R_A$$

Se a questa somma tra le prime due equazioni sottraiamo la terza otteniamo:

$$\frac{2 \times R_{AB} \times R_{CA}}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}} = 2 \times R_A$$

In modo analogo otteniamo:

TRIANGOLO - STELLA

$R_A = \frac{R_{AB} \times R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$
$R_B = \frac{R_{AB} \times R_{BC}}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}}$
$R_C = \frac{R_{CA} \times R_{BC}}{R_{AB} + R_{CA} + R_{BC}}$

Queste tre relazioni rendono quindi possibile il calcolo delle resistenze di un collegamento a triangolo in modo tale che questo possa essere sostituito da una stella.

Sfruttando il sistema di tre equazioni prima dedotto possiamo anche risolvere il problema inverso e cioè la sostituzione di una stella ad un triangolo.

In questo caso saranno i termini R_A , R_B , R_C , costituenti i lati della stella ad essere noti e le incognite risulteranno i lati del triangolo R_{AB} R_{BC} R_{CA} .

La soluzione del sistema che potete verificare come utile esercizio, fornisce questi risultati:

STELLA – TRIANGOLO

$$R_{AB} = R_A + R_B + (R_A \times R_B) / R_C$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + (R_B \times R_C) / R_A$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + (R_C \times R_A) / R_B$$