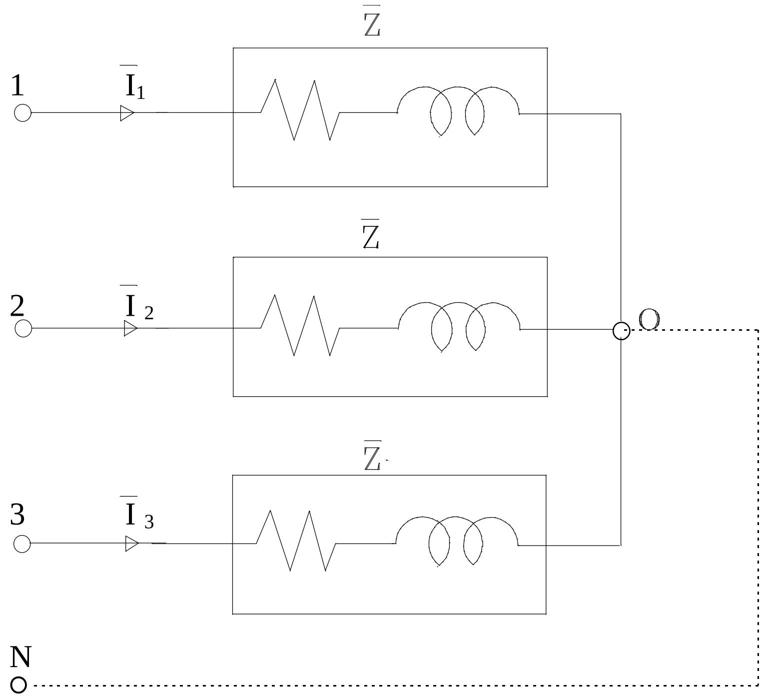
POTENZA CON CARICO EQUILIBRATO COLLEGATO A STELLA CON E SENZA NEUTRO

Nel caso di alimentazione a quattro fili si assume come riferimento proprio il neutro cioè il centro stella del generatore.



Le potenze attiva e reattiva risultano:

$$P_T = V_{10}I_1\cos\varphi_1 + V_{20}I_2\cos\varphi_2 + V_{30}I_3\cos\varphi_3$$

$$Q_T = V_{10}I_1\text{sen}\varphi_1 + V_{20}I_2\text{sen}\varphi_2 + V_{30}I_3\text{sen}\varphi_3$$

Con carico equilibrato le tre correnti formano una terna equilibrata, sfasata dell'angolo φ rispetto alla terna delle tensioni stellate (di fase). Posso quindi scrivere:

$I_L = |\overline{I_1}| = |\overline{I_2}| = |\overline{I_3}|$

$V_F = |\overline{V_{10}}| = |\overline{V_{20}}| = |\overline{V_{30}}|$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi = \text{arctg } X/R$

dove X ed R sono rispettivamente la reattanza e la resistenza di ogni singola fase.

$$\mathbf{P_T = 3\ V_F\ I_L\ \cos\ \varphi}$$

$$\mathbf{Q_T = 3\ V_F\ I_L\ \text{sen}\ \varphi}$$

$$\mathbf{S_T = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3\ V_F\ I_L}$$

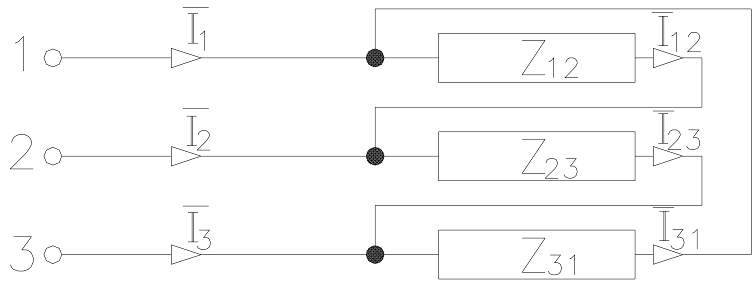
Poiché siamo in presenza di un carico **equilibrato**, l'eliminazione del neutro non comporta alcuna variazione e le espressioni di P, Q, S rimangono inalterate anche nel caso di stella senza neutro. Sostituendo la tensione concatenata a quella stellata e ricordando che $V_F = V_C/\sqrt{3}$, le espressioni delle potenze diventeranno

$$P_T = \sqrt{3}\, V_C\, I_L \cos\varphi$$
$$Q_T = \sqrt{3}\, V_C\, I_L\, \text{sen}\,\varphi$$
$$S_T = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}\, V_C\, I_L$$

In queste espressioni l'angolo φ rappresenta sempre lo sfasamento fra la corrente e la tensione di fase, cioè quello ricavabile dal triangolo dell'impedenza, e non quello tra la tensione concatenata e la I_L.

POTENZA CON CARICO EQUILIBRATO COLLEGATO A TRIANGOLO

Nel caso di collegamento a triangolo equilibrato



le potenze attiva e reattiva possono essere calcolate come somma delle potenze nelle singole fasi:

$$P_T = V_{12}\, I_{12} \cos\varphi_1 + V_{23}\, I_{23} \cos\varphi_2 + V_{31}\, I_{31} \cos\varphi_3$$
$$Q_T = V_{12}\, I_{12}\, \text{sen}\,\varphi_1 + V_{12}\, I_{12}\, \text{sen}\varphi_2 + V_{31}\, I_{31}\, \text{sen}\,\varphi_3$$

poiché il nostro carico è equilibrato:

$$\left|\overline{I}_{12}\right| = \left|\overline{I}_{23}\right| = \left|\overline{I}_{31}\right| = I_F$$
$$\left|\overline{V}_{12}\right| = \left|\overline{V}_{23}\right| = \left|\overline{V}_{31}\right| = V_C$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \text{arctg } X/R$$

Si ricava

$$P_T = 3\, V_C\, I_F \cos\varphi$$
$$Q_T = 3\, V_C\, I_F\, \text{sen}\,\varphi$$

Poiché anche le correnti di linea formano una terna equilibrata di modulo $I_L = \sqrt{3}\, I_F$

si ricava

$$P_T = \sqrt{3}\, V_C\, I_L \cos\varphi$$
$$Q_T = \sqrt{3}\, V_C\, I_L\, \text{sen}\,\varphi$$

dove l'angolo φ è sempre quello del triangolo dell'impedenza. Si conclude che: qualunque sia il collegamento di un utilizzatore equilibrato la potenza attiva si può esprimere come:

$P_T = \sqrt{3}$ Vc I_L cos φ e la potenza reattiva come $Q_T = \sqrt{3}$ Vc I_L sen φ dove V ed I sono la tensione concatenata e la corrente di linea.

Esempio:

Una linea trifase con V = 380V alimenta un carico equilibrato collegato a stella con valore di impedenza $\overline{Z}$ = (60+J80) Ω. Determinare le correnti, le potenze ed il fattore di potenza.

L'impedenza presenta modulo

Z = $\sqrt{60^2 + 80^2}$ = 100 Ω

Le correnti di linea hanno modulo

I = V/$\sqrt{3}$Z = 380/$\sqrt{3}$ x 100=2,2 A

La potenza attiva risulta

P = $\sqrt{3}$ V I cos φ = $\sqrt{3}$ x 380 x 2,2 x R/Z= $\sqrt{3}$ x 380 x 2,2 x 0,6= 869 W

Quella reattiva si calcola analogamente

Q = $\sqrt{3}$ V I sen φ = $\sqrt{3}$ x 380 x 2,2 x X/Z= 1158 VAR
S = $\sqrt{P^2 + Q^2}$ = $\sqrt{3}$ V I=1447 VA
cos φ = R/Z = P/S = 0,6

Esempio :

Un carico equilibrato collegato ad una linea con V = 380V assorbe una corrente di linea I = 12A ed una potenza attiva P = 4,5 kW. Calcolare il valore delle impedenze se collegate a stella e/o a triangolo:

Soluzione:

Si può calcolare la potenza apparente

S = $\sqrt{3}$ V I = $\sqrt{3}$ x 380 x 12 = 7898 VA

siccome il carico è equilibrato il fattore di potenza coincide con il cos φ delle impedenze; pertanto:
cosφ = P/S = 0,57 $\Rightarrow$ sen φ =0,82

Collegamento a stella:

Z = V/$\sqrt{3}$ I=380/$\sqrt{3}$ x 12 = 18,3 Ω
R = Z cos φ = 18.3 x 0.57 = 10,4 Ω
X = Z sen φ = 18.3 x 0.82 = 15 Ω

Collegamento a triangolo:

La tensione ai capi dell'impedenza è quella concatenata mentre la corrente di fase risulta

$I_{12} = I_{23} = I_{31} = I / \sqrt{3} = 6{,}93$ A

da cui $Z = V/I = 380 / 6.93 = 54.8\ \Omega$
$R = Z \cos \varphi = 54{,}8 \times 0{,}57 = 31{,}2\ \Omega$
$X = Z \text{ sen } \varphi = 54{,}8 \times 0{,}82 = 45\ \Omega$

Esercizio:

Quanto vale la potenza attiva assorbita da un utilizzatore trifase costituito da tre impedenze con angolo caratteristico di 60°,che assorbe 20 A ed è attaccato da una linea a 220 V ?

Soluzione :

$P = \sqrt{3}\ 220 \times 20 \times 0{,}5 = 3.811$ W = 3,81 kW.

Esercizio:

Un utilizzatore equilibrato ohmico-capacitivo collegato ad una linea a 380 V assorbe :

P = 2 kW; S = 3 kVA. Trovare la corrente assorbita.

Soluzione:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\,V} = \frac{3.000}{\sqrt{3}\ 380} = 4{,}56 \text{ A}$$

POTENZA NEI CARICHI SQUILIBRATI COLLEGATI A STELLA O A TRIANGOLO

Nel caso di carichi squilibrati a stella con neutro è conveniente assumere come punto di riferimento il neutro stesso; l'espressione della potenza risulta :

$P = V_{10}\, I_1 \cos\varphi_1 + V_{20}\, I_2 \cos\varphi_2 + V_{30}\, I_3 \cos\varphi_3$ dove

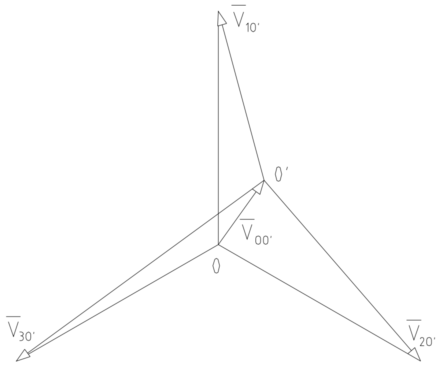
$$\varphi_1 = \text{arctg}\frac{X_1}{R_1} \qquad \varphi_2 = \text{arctg}\frac{X_2}{R_2} \qquad \varphi_3 = \text{arctg}\frac{X_3}{R_3}$$

e non sono possibili ulteriori semplificazioni.
Se il collegamento è senza neutro e si assume come riferimento il centro stella dei generatori,si avrà:

$P_T = V_{10}\, I_1 \cos (V_{10} \,\hat{}\, I_1) + V_{20}\, I_2 \cos (V_{20}\, I_2) + V_{30}\, I_3 \cos (V_{30}\, I_3)$
$Q_T = V_{10}\, I_1 \text{ sen } (V_{10}\, I_1) + V_{20}\, I_2 \text{ sen } (V_{20}\, I_2) + V_{30}\, I_3 \text{ sen } (v_{30}\, I_3)$

In questo caso però lo sfasamento tra V e I per ogni fase non corrisponde all'angolo dato dal diagramma dell'impedenza, ma va calcolato e dipende dallo spostamento del centro stella del carico.

Se invece si assume come riferimento il centro stella delle impedenze 0',



la potenza assume l'espressione

$$P = V_{10'}\ I_1\ \cos\varphi_1 + V_{20'}\ I_2\ \cos\varphi_2 + V_{30'}\ I_1\ \cos\varphi_3$$

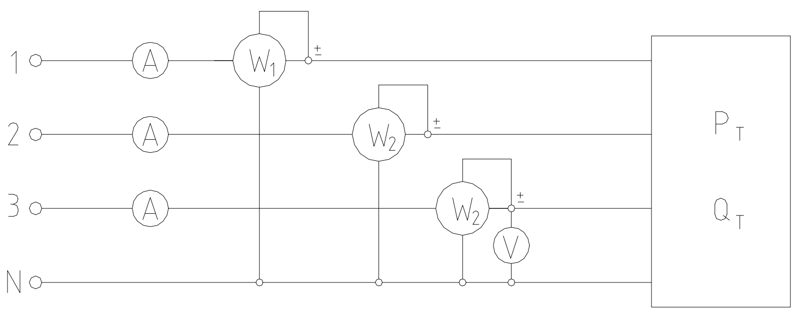
dove gli angoli φ_1, φ_2, φ_3 possono essere facilmente ricavati delle impedenze, mentre le tensioni $V_{10'}$, $V_{20'}$, $V_{30'}$ **devono essere calcolate, poiché dipendono da $V_{0'0}$.**
Risulta comunque sempre valido, e spesso agevole, note l'impedenza e la corrente di linea, calcolare la potenza come segue

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$
$$Q = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Se il carico squilibrato è collegato a triangolo il calcolo della potenza puo' essere effettuato considerando separatamente le tre fasi, e sommando fra loro le singole potenze.

$$P = \left(\frac{V_{12}}{Z_{12}}\right)^2 R_{12} + \left(\frac{V_{23}}{Z_{23}}\right)^2 R_{23} + \left(\frac{V_{31}}{Z_{31}}\right)^2 R_{31}$$
$$Q = \left(\frac{V_{12}}{Z_{12}}\right)^2 X_{12} + \left(\frac{V_{23}}{Z_{23}}\right)^2 X_{23} + \left(\frac{V_{31}}{Z_{31}}\right)^2 X_{31}$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Per la misura delle potenze attive nei sistemi trifasi a quattro fili si utilizzano tre Wattmetri inseriti nel seguente modo:



La potenza attiva è data dalla somma delle singole potenze
$P_T = P_1 + P_2 + P_3$
Si utilizzano quindi tanti Wattmetri quanti sono i conduttori meno uno perchè viene preso come riferimento.

Per misurare la potenza reattiva,si procede alla misurazione delle correnti I_1,I_2,I_3 e si calcolano le singole potenze apparenti:

$S_1 = E\ I_1 \quad S_2 = E\ I_2 \quad S_3 = E\ I_3$

Le potenze reattive risultano

$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} \qquad Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} \qquad Q_3 = \sqrt{S_3^2 - P_3^2}$

La Q_T si ricava dalla **somma algebrica** : **$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$.**

Nel caso di sistemi a tre fili si possono utilizzare diversi tipi di inserzione. I più diffusi risultano essere l'inserzione Aron, l'inserzione Righi e l'inserzione Barbagelata.

Esercizio:

Un sistema di impedenze viene alimentato da un sitema a 4 fili. Determinare le potenze attive,reattive ad apparenti e il fattore di potenza totale.

Dati: $V = 380V \qquad \overline{Z_1} = 10 + j\,20 \qquad \overline{Z_2} = 10 + j\,20 \qquad \overline{Z_3} = -j\,20$

Soluzione:

Il collegamento è a stella con neutro.Calcoliamo il modulo delle correnti di linea.

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{380}{\sqrt{3}\ \sqrt{10^2 + 20^2}} = \frac{220}{22{,}3} = 9{,}87\ A$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{220}{22{,}3} = 9{,}8\ A \quad ; \quad I_3 = \frac{220}{20} = 11\ A$$

Le potenze attive e reattive totali risultano dalla somma delle singole potenze:
$P = R_1\ I_1^2 + R_2\ I_2^2 + 0 = 1936\ W$
$Q = X_1\ I_1^2 + X_2\ I_2^2 - X_3\ I_3^2 = 1936\ VAR$
Il fattore di potenza non coincide con nessuno dei cosφ di nessuna impedenza.
Esso si ricava come contributo di tutte le potenze presenti,e il suo valore convenzionale risulta

$$\cos \Phi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{1936}{2738} = 0{,}707$$

Esercizio :

Un sistema di impedenze viene collegato a triangolo ed alimentato da un sistema trifase simmetrico. Determinare la potenza ed il fattore di potenza convenzionale.

Dati: $V = 380$ V $\quad \overline{Z}_{12} = 10 + j30 \quad \overline{Z}_{23} = 20 - j10 \quad \overline{Z}_{31} = 30 + j20$

Soluzione:

Si calcolano i moduli delle impedenze:

$Z_{12} = \sqrt{10^2 + 30^2} = 31{,}6\ \Omega$

$Z_{23} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22{,}3\ \Omega$

$Z_{31} = \sqrt{30^2 + 20^2} = 36{,}0\ \Omega$

I moduli delle correnti risultano:

$I_{12} = \dfrac{V_{12}}{Z_{12}} = 12$ A $\qquad I_{23} = \dfrac{380}{22{,}3} = 17$ A $\qquad I_{31} = \dfrac{380}{36} = 10{,}5$ A

A tal punto possiamo calcolarci le potenze :

$P = P_{12} + P_{23} + P_{31} = R_{12}\, I_{12}^2 + R_{23}\, I_{23}^2 + R_{31}\, I_{31}^2 = 10.525$ W

$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = X_{12}I_{12}^2 - X_{23}I_{23}^2 + X_{31}I_{31}^2 = 3.635$ VAR

$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 11.137$ VA $\qquad \cos\Phi = \dfrac{P}{S} = \dfrac{10.527}{11.137} = 0{,}94$

Nella tecnica pratica la misura di potenza reattiva può essere realizzata con :

1) Misure dirette mediante VARMETRI.

2) Misure indirette mediante WATTMETRI (Inserzioni Aron, Righi e Barbagelata).

Normalmente l’ impiego di Varmetri è riservato ad installazioni fisse da quadro e quindi di non grande precisione.

Il Varmetro deriva direttamente dal Wattmetro adottando artifici che ottengono una coppia motrice proporzionale, oltrechè alla tensione efficace e alla corrente, al seno dell’ angolo di sfasamento fra la tensione V e la corrente I.
