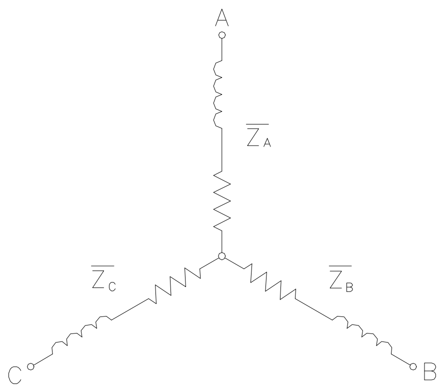
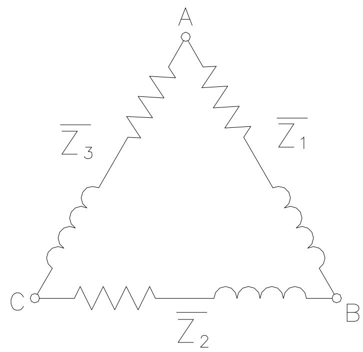
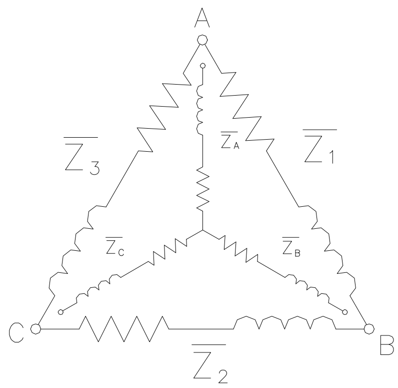
TRASFORMAZIONE DI UN TRIANGOLO DI IMPEDENZE IN UNA STELLA EQUIVALENTE E VICEVERSA

Dato un triangolo di impedenze uguali o diverse si può sempre sostituirlo con una stella equivalente e viceversa.







Questa equivalenza si verifica quando le impedenze risultanti misurate separatamente fra le 3 coppie di morsetti AB, BC e CA sono le stesse, tanto nel collegamento a stella che a triangolo.
Osservando le figure si vede che nel collegamento a triangolo l' impedenza risultante fra A e B si compone dell' impedenza $\overline{Z_1}$ accoppiata in parallelo con le altre due impedenze $\overline{Z_2}$ e $\overline{Z_3}$ collegate in serie fra loro. L'impedenza complessiva di quest'arco doppio viene definita così dall'espressione complessa:

$$\overline{Z}_{AB} = \frac{\overline{Z_1}\ (\overline{Z_2} + \overline{Z_3})}{\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3}}$$

Nel collegamento a stella invece fra i morsetti A e B presi a sé, lasciando aperto un morsetto C si hanno semplicemente le due impedenze $\overline{Z_A}$ e $\overline{Z_B}$ in serie fra loro cioè :

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_A + \overline{Z}_B$$

Ripetendo un ragionamento analogo per le altre due coppie di morsetti ed uguagliando infine le espressioni delle impedenze omonime si ottengono le relazioni di equivalenza :

$$\overline{Z}_{AB} = \frac{\overline{Z}_1 (\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3)}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = \overline{Z}_A + \overline{Z}_B$$

$$\overline{Z}_{BC} = \frac{\overline{Z}_2 (\overline{Z}_3 + \overline{Z}_1)}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = \overline{Z}_B + \overline{Z}_C \qquad (*)$$

$$\overline{Z}_{CA} = \frac{\overline{Z}_3 (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = \overline{Z}_C + \overline{Z}_A$$

Risolvendo tale sistema rispetto alle tre impedenze stellate ottengo:

$$\overline{Z}_A = \frac{\overline{Z}_3 \ \overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} \qquad \overline{Z}_B = \frac{\overline{Z}_1 \ \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} \qquad \overline{Z}_C = \frac{\overline{Z}_2 \ \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}$$

Ponendo in queste, al posto di ogni singola impedenza del triangolo, la rispettiva espressione complessa

$$\overline{Z}_1 = R_1 + j\, X_1 \qquad \overline{Z}_2 = R_2 + j\, X_2 \qquad \overline{Z}_3 = R_3 + j\, X_3$$

ed eseguendo le operazioni ottengo le tre espressioni che definiscono le tre impedenze della stella equivalente al triangolo.

Se le tre impedenze del triangolo sono uguali fra loro cioè $\overline{Z_1} = \overline{Z_2} = \overline{Z_3}$ anche le tre impedenze della stella equivalente sono uguali e pari ciascuna a un terzo delle impedenze del triangolo ; indicando in tal caso con $\overline{Z}_D$ le impedenze del triangolo e con $\overline{Z}_Y$ le impedenze della stella equivalente risulta:

$$\overline{Z}_Y = \frac{\overline{Z}_D}{3} \ ;$$

lo stesso rapporto va esteso tanto alle resistenze che alle reattanze ponendo

$$R_Y = \frac{R_D}{3} \qquad X_Y = \frac{X_D}{3}$$

Il problema inverso al precedente consiste nella trasformazione di una stella di impedenze in un triangolo equivalente.

Se tutte le impedenze sono identiche risulta

$$R_D = 3\, R_Y \qquad X_D = 3\, X_Y$$

Una stella equilibrata può quindi essere sostituita con un triangolo formato con tre impedenze uguali aventi ciascuna una resistenza ohmica e un reattanza di valore triplo a quelle dei 3 lati della stella.
Se la stella è squilibrata, invece, le tre impedenze del triangolo equivalente si determinano risolvendo le tre equazioni viste ($*$) rispetto alle incognite $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$ ottenendo

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{Z}_A\,\overline{Z}_B + \overline{Z}_B\,\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\,\overline{Z}_A}{\overline{Z}_C} \quad \overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_A\,\overline{Z}_B + \overline{Z}_B\,\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\,\overline{Z}_A}{\overline{Z}_A} \quad \overline{Z}_3 = \frac{\overline{Z}_A\,\overline{Z}_B + \overline{Z}_B\,\overline{Z}_C + \overline{Z}_C\,\overline{Z}_A}{\overline{Z}_B}$$

(analoghe a $R_1 = R_A + R_B + R_A R_B / R_C$ facendo il m.c.m).
Queste relazioni possono servire in particolare nella determinazione dello stato di regime di una stella squilibrata di impedenze con centro isolato.

Invece di applicare il procedimento visto in precedenza, si può sostituire alla stella con le impedenze $\overline{Z}_A$, $\overline{Z}_B$, $\overline{Z}_C$ il triangolo equivalente formato con le impedenze $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$.Si possono così calcolare le correnti $\overline{I_1}$, $\overline{I_2}$, $\overline{I_3}$ nei lati del triangolo e risalire da queste alle tre correnti di linea $\overline{I_A}$, $\overline{I_B}$, $\overline{I_C}$ .Mediante le correnti così ottenute si calcolano infine le tre tensioni relative alle tre impedenze stellate $\overline{Z}_A$, $\overline{Z}_B$, $\overline{Z}_C$.
