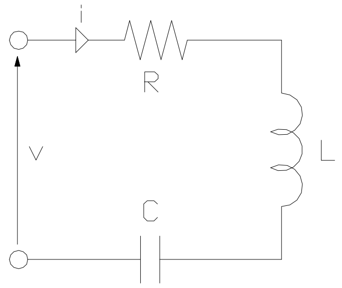
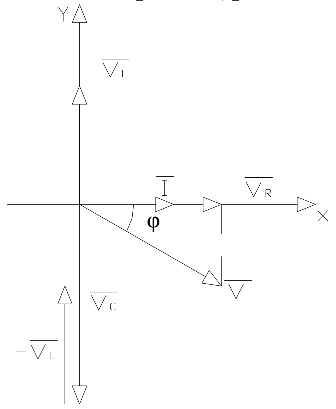
LEGGE DI OHM

Inizieremo a trattare il caso in cui il circuito elettrico risulta schematizzabile con soli parametri in serie :



Supponiamo nota la corrente e quindi incognita la tensione da applicare al circuito.
Adottiamo il metodo vettoriale per rappresentare la tensione applicata al circuito,la corrente che vi scorre e quindi le relative cadute di tensione sulla resistenza,sull'induttanza e sulla capacità; ciò è lecito poiché queste sono tutte grandezze sinusoidali della stessa frequenza e pertanto tutte rappresentabili con vettori fermi nel piano.

Siccome il vettore $\bar{I}$ è supposto noto, esso verrà posto (per comodità) sull' asse orizzontale.



Questa corrente determinerà,come si è detto, una caduta di tensione sulla resistenza R, il cui vettore indicheremo con $\overline{V}_R$,in fase con la corrente $\bar{I}$ e di ampiezza R I (segmento OA), una caduta di tensione nell'induttanza L, il cui vettore indicheremo con $\overline{V}_L$,in quadratura in anticipo sulla corrente $\bar{I}$ e di ampiezza ω L I (segmento OB), una caduta di tensione sulla capacità C, il cui vettore indicheremo con $\overline{V}_C$ in quadratura in ritardo sulla corrente $\bar{I}$ e di ampiezza pari a $\frac{1}{\omega C} I$ (segmento OC).

D'altra parte la somma di questi tre vettori $\overline{V}_R$; $\overline{V}_L$; $\overline{V}_C$ dovrà dare per risultante la tensione $\overline{V}$ applicata al circuito poiché nel circuito non agiscono altre cadute di tensione.

Tale costruzione vettoriale suggerisce di impostare la risoluzione del problema in altro modo, ricorrendo alla rappresentazione simbolica delle grandezze vettoriali.
Difatti il vettore $\overline{V}$ vale $\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C$, che prende nome di **legge di Ohm in forma simbolica**:

Infatti : $\overline{V}_R = \mathbf{R} \times \bar{I}$ $\overline{V}_L = j\,\omega\, L \times \bar{I} = j\, X_L \times \bar{I}$ $\overline{V}_C = -j\,\frac{1}{\omega C} \times \bar{I} = -j\, X_C \times \bar{I}$ per cui

$$\overline{V} = R\,\bar{I} + j\,\omega\, L\,\bar{I} - j\,(1/(\omega C))\,\bar{I} = [\,R + j\,(\omega L - 1/(\omega C))\,] \times \bar{I} = \overline{Z} \times \bar{I}$$

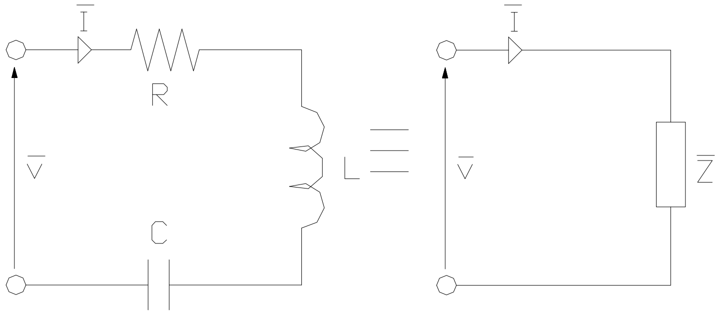
Il termine tra parentesi quadra, lega la tensione e la corrente ai parametri R,L,C del circuito. **Tale termine che moltiplica la corrente è quindi un operatore vettoriale che in elettrotecnica prende il nome di impedenza $\overline{Z}$; esso è dunque la quantità complessa :**

$$\overline{Z} = R + j\,(\,\omega L - 1/(\,\omega C\,) = R + j\,(\,X_L - X_C\,).$$

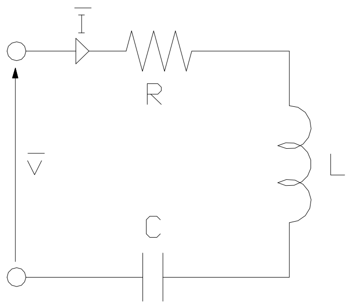
Essendo una quantità complessa, sarà composta da una parte reale che è rappresentata dalla resistenza R e da una parte immaginaria che è rappresentata dalla somma algebrica delle reattanze X_L e X_C. Tale somma algebrica prende il nome di **reattanza totale del circuito**: $\mathbf{j\,X = jX_L - j\,X_C}$.

L'impedenza $\overline{Z}$ potrà quindi essere scritta anche nella forma detta binomia $\overline{Z}$ = **R + j X** e quindi la legge di Ohm si può scrivere meglio come

$\overline{V} = (\,R \pm j\,X\,)\,\bar{I} = \overline{Z} \times \bar{I}$, dalla quale posso ricavare $\overline{Z} = \overline{V} / \bar{I}$ ed il circuito diviene :



Ritornando al circuito di prima :



del quale si suppongono note le caratteristiche elettriche R, L e C, l'impedenza risulterà individuata nel suo modulo Z e nel suo argomento φ dalle seguenti relazioni :

$$\mathbf{Z} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad ; \qquad \mathbf{tg}\,\varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

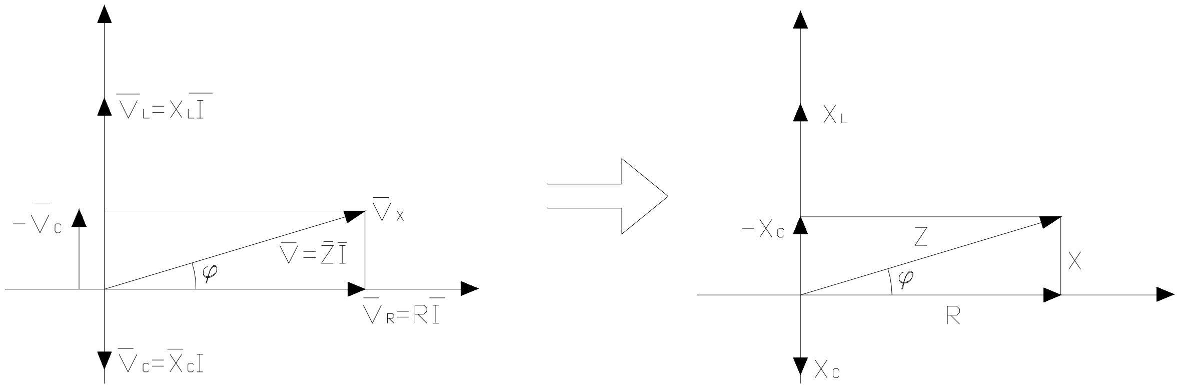
Noti questi valori posso determinarmi la corrente nel circuito che in valore efficace vale :

$$\mathbf{I} = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Lo sfasamento φ tra la tensione totale V applicata al circuito e la corrente I che vi circola, può essere calcolato con le note formule trigonometriche:

“ Un cateto è uguale all’ipotenusa per il coseno dell’angolo adiacente o per il seno dell’angolo opposto “.
“ La tangente di un angolo è il rapporto fra il seno ed il coseno dell’angolo stesso “.

Se si osserva il triangolo delle tensioni, si può notare che dividendo tutti i lati per la corrente, si ottiene il triangolo dell’impedenza:



E pertanto: tan φ = $\frac{X_L}{R}$ cosφ = $\frac{R}{Z}$ senφ = $\frac{X_L}{Z}$

Molte volte il circuito pur essendo di tipo serie, potrà essere caratterizzato da solo due qualsiasi dei tre caratteri fondamentali RLC. Le formule, evidentemente, saranno ancora valide e compariranno solamente i parametri esistenti.

È molto importante osservare che il circuito potrebbe risultare composto da più impedenze Z_1, Z_2, Z_3 in serie fra di loro.

In tal caso posso scrivere la legge di Ohm:

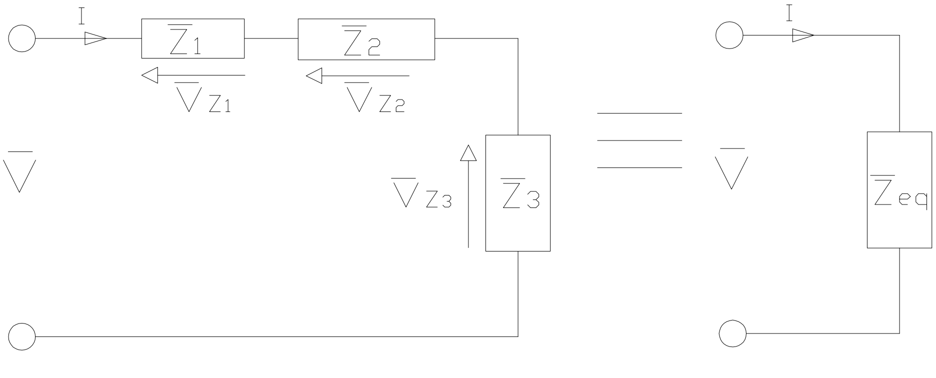
$\overline{V} = \overline{V}_{Z1} + \overline{V}_{Z1} + \overline{V}_{Z1}$ + **………**

D’altra parte ogni caduta di tensione può essere scritta esplicitamente come prodotto fra le relative impedenze e le correnti che le attraversano.

$\overline{V} = \overline{Z_1 I} + \overline{Z_2 I} + \overline{Z_3 I} + \ldots\ldots = (\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3})\,\bar{\mathbf{I}}$ e quindi $\overline{V} = \bar{\mathbf{I}} \mathbf{\ x\ } \mathbf{\Sigma}\, \overline{Z}$

Tali relazioni dimostrano come più impedenze collegate in serie, cioè percorse tutte dalla stessa corrente, si possono sommare fra loro ***ma con le regole delle grandezze vettoriali o complesse.***
Il circuito è come se fosse costituito quindi da un’unica impedenza detta impedenza equivalente:

$$\overline{Z}_{eq} = \mathbf{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + j\ (X_1 + X_2 + X_3 + \ldots).}$$



CRITERI GENERALI PER LA RISOLUZIONE DEI CIRCUITI

Il metodo di **Steinmetz-Kennelly** afferma che **:**

Le equazioni che si possono scrivere in un circuito elettrico in un regime sinusoidale sono sostanzialmente le stesse di quelle che si scriverebbero per lo stesso circuito in corrente continua, con l'avvertenza però che ora le tensioni e le correnti **appaiono in simboli complessi e che al posto della resistenza R, compaiono le impedenze Z (operatori complessi).**
Ovviamente le relazioni fra le varie grandezze debbono intendersi vettoriali.
La ricerca dei valori assunti dalle correnti, dalla c.d.t., etc, relative ad un qualsiasi circuito in regime sinusoidale potrà essere condotta quindi o con il metodo grafico-vettoriale o con quello simbolico, dopo aver impostato le relative equazioni vettoriali. Un esempio di applicazione è proprio la legge di Ohm in termini vettoriali

$$\overline{V} = \overline{I} \sum \overline{Z}$$

Così per mezzo di tale criterio si passerà alla legge di Ohm generalizzata:

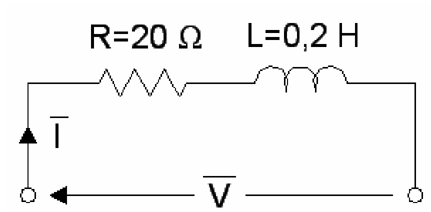
$$\sum \overline{V_0} - \sum \overline{V_{0C}} = \overline{I} \sum \overline{Z}$$

con l'avvertenza che le forze contro elettromotrici $\sum \overline{V_{0C}}$ non sono quelle di autoinduzione né quelle dovute alla capacità, poiché queste appaiono come c.d.t. al secondo membro.

Inoltre, sempre grazie a tale criterio,si possono estendere alle reti tutti i principi enunciati per le reti in corrente continua, quali: il principio di Kirchhoff, il principio della sovrapposizione degli effetti, Thevenin, Millmann, etc.

ESERCIZIO :

Ai capi di un circuito R = 20 Ω e L = 0,2 H si applicano 220 V a 42 Hz.
Determinare il valore efficace della corrente e lo sfasamento sulla tensione V.



$\mathbf{X_L} = 2\,\pi\, f\, L = 2 \times 3{,}14 \times 42 \times 0{,}2 = \mathbf{52{,}75\ \Omega}$ $\qquad$ $\mathbf{Z} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \mathbf{56{,}4\ \Omega}$

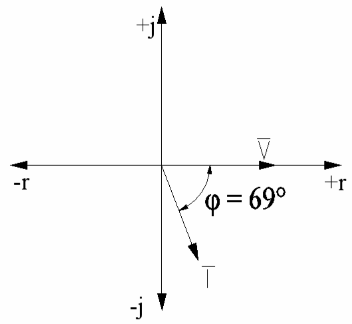
$\mathbf{I} = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{220}{56{,}4} = \mathbf{3{,}90\ A} \quad \rightarrow \quad \mathbf{tg\ \varphi} = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{52{,}75}{20} = \mathbf{2{,}637} \rightarrow \mathbf{\varphi = 69°13'}$

Risolvendo con i numeri complessi :

$\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L} = R\,\overline{I} + j\ X_L \overline{I} = (\mathrm{R+jX_L})\ \overline{I} \quad \rightarrow \quad \overline{V} = \overline{Z} \times \overline{\overline{I}}$ → Pongo ora la tensione sull'asse reale in opportuna scala : $\overline{I} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}} = \dfrac{220}{20 + j52{,}75} = 1{,}38 - j\ 3{,}65$

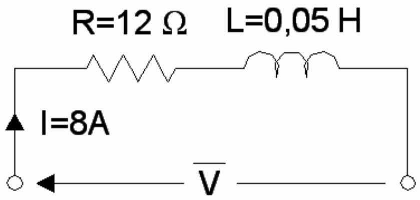
Valore efficace : $I = \sqrt{1{,}38^2 + 3{,}65^2} = 3{,}90$ A

Diagramma vettoriale :



ESERCIZIO :

Determinare la tensione che deve essere applicata ad un circuito ohmico-induttivo per far circolare una corrente di 8 A a 60 Hz.
Determinare poi lo sfasamento fra tensione e corrente.



$\mathbf{X_L} = 2\ \pi\ f\ \mathrm{L} = 2 \times 3{,}14 \times 60 \times 5 \times 10^{-2} = \mathbf{18{,}84\ \Omega}$ $\mathbf{Z} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \mathbf{22{,}33\ \Omega}$

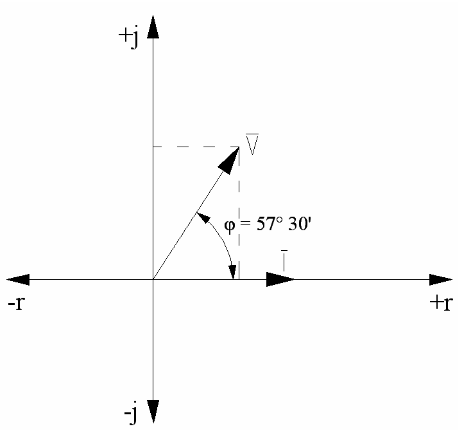
$\mathbf{V} = \mathrm{Z} \times \mathrm{I} = 22{,}33 \times 8 = \mathbf{178{,}64\ V}$ $\mathbf{tg\ \varphi} = \dfrac{X_L}{R} = \dfrac{18{,}84}{12} = \mathbf{1{,}57} \rightarrow \boldsymbol{\varphi = 57°30'}$

Risolvendo con i numeri complessi :

$\overline{Z} = \mathrm{R} + \mathrm{j}\ \mathrm{X_L} = 12 + \mathrm{j}\ 18{,}84 \rightarrow \overline{V} = \overline{Z} \times \overline{\overline{I}} \rightarrow$ Pongo ora la corrente sull'asse reale :

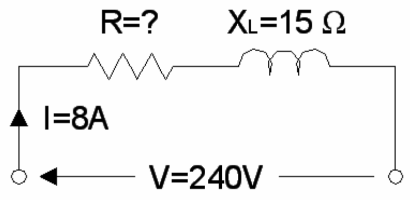
$\overline{V} = (12 + \mathrm{j}\ 18{,}84) \times 8 = 96 + \mathrm{j}\ 150{,}72 \rightarrow$ **Valore efficace :** $V = \sqrt{96^2 + 150{,}72^2} = \mathbf{178{,}64\ V}$

$\mathbf{tg\ \varphi} = \dfrac{150{,}72}{96} = \mathbf{1{,}57} \rightarrow \boldsymbol{\varphi = 57°30'}$



ESERCIZIO :

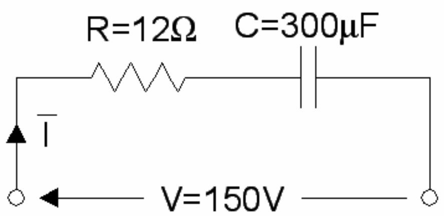
Dato il seguente circuito determinare R e φ :



$Z = \frac{V}{I} = \frac{240}{8} = 30\ \Omega \ \rightarrow \ R = \sqrt{Z^2 - X_L^2} = 26\ \Omega \ \rightarrow \ \text{tg}\ \varphi = \frac{X_L}{R} = \frac{15}{26} = 0{,}577 \ \rightarrow \ \varphi = 30°$

ESERCIZIO :

Dato il seguente circuito determinare la corrente:

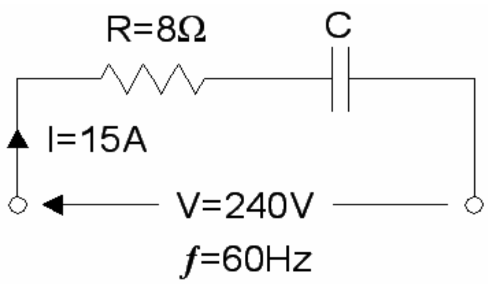


$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2x3{,}14x50x3x10^{-4}} = 10{,}61\ \Omega \ \rightarrow \ Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = 16{,}02\ \Omega \quad I = \frac{V}{Z} = 9{,}36\ \text{A}$

$\text{tg}\ \varphi = -\frac{X_C}{R} = -0{,}883 \quad \varphi = -41°\ 28'$

ESERCIZIO :

Dato il seguente circuito determinare la capacità :

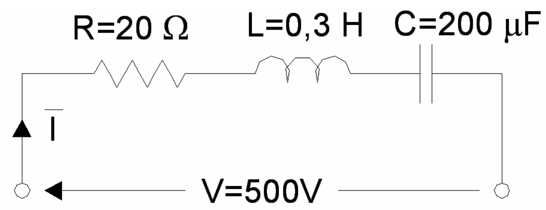


$Z = \frac{V}{I} = \frac{240}{15} = 16\ \Omega \qquad X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = 13{,}85\ \Omega \ \rightarrow \ X_C = \frac{1}{2\pi f C} \qquad \text{C} = \frac{1}{2\pi f X_C} =$

$\frac{1}{2x3{,}14x60x13{,}85} = 192 \times 10^{-6}\ \text{F} = 192\ \mu\text{F}$

ESERCIZIO :

Dato il seguente circuito determinare la corrente e lo sfasamento φ tra la tensione e la corrente:



X_L = ωL = 2 π *f* L = 2 x 3,14 x 50 x 0,3 = **94,25 Ω**

$X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f C} = \dfrac{1}{2x3{,}14x50x2x10^{-4}}$ = **15,92 Ω**

Con i valori efficaci :

$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$ = 80,8 Ω $\qquad$ $I = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{500}{80{,}8}$ = 6,19 A

$tg\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R}$ = 3,914 → **φ = 75°68'**

La tensione è in anticipo sulla corrente perché prevale l'effetto induttivo.

Risolvendo con i numeri complessi :

$\overline{Z}$ = 20 + j78,33 → $Z = \sqrt{20^2 + 78{,}33^2}$ = 80,84 Ω → Pongo ora la tensione sull'asse reale in opportuna scala : $\overline{V}$ = 500 +j 0

$\overline{I} = \dfrac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \dfrac{500}{20 + j78{,}33}$ = 1,53 – j 6 $\qquad$ **Valore efficace :** $I = \sqrt{1{,}53^2 + 6^2}$ = 6,19 A

$tg\varphi = \dfrac{6}{1{,}53}$ = 3,92→ **φ = 75°68'**

A tal punto possiamo anche calcolare le cadute di tensione sui singoli elementi del circuito e fare una verifica sulla tensione totale, come somma vettoriale delle singole cadute di tensione :

$\overline{V_R} = Rx\overline{I}$ = 20 x (1,53 –j 6) = 30,6 – j 120

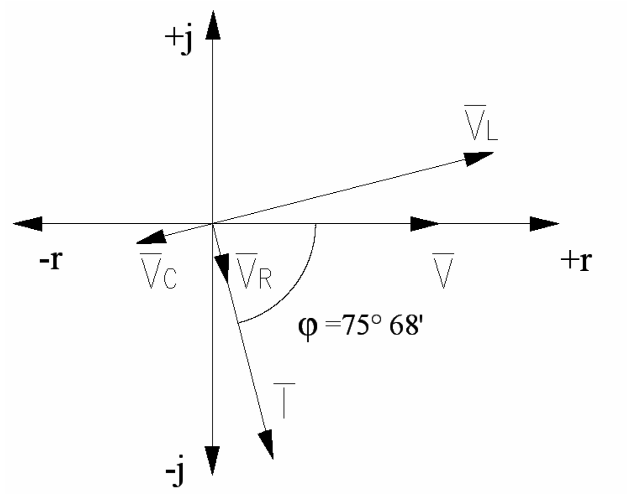
Valore efficace : $V_R = \sqrt{30{,}6^2 + 120^2}$ = 123,84 V

$\overline{V_L} = jX_L x\overline{I} = j(94{,}2)x(1{,}53 - j6)$ = 565,4 + j144,18

Valore efficace : $V_L = \sqrt{565^2 + 144{,}18^2}$ = 583,2 V

$\overline{V_C} = -jX_C x\overline{I} = -j15{,}92x(1{,}53 - j6)$ = - 95,52-j24,35

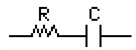
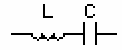
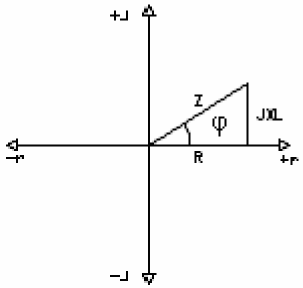
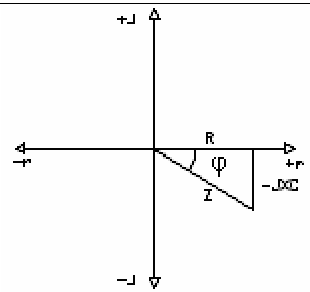
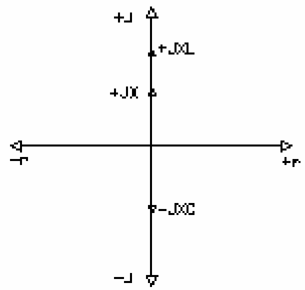
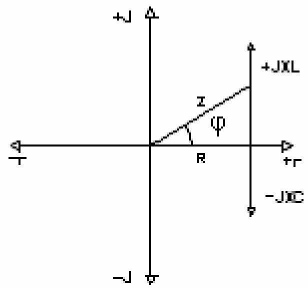
Valore efficace : V_C **=** $\sqrt{95{,}52^2 + 24{,}35^2}$ **= 98,57 V**



Verifica : $\overline{V} = \overline{V_R} + \overline{V_L} + \overline{V_C}$ **= (**30,6 – j 120)+(565,4 + j144,18)+(- 95,52-j24,35) = 500,408 – j 0,17
Valore efficace $V = \sqrt{500{,}4^2 + 0{,}17^2}$ **= 500,4 V**

Sommando le tensioni parziali, non vettorialmente si ottiene

$V = V_R + V_L + V_C$ **= 123,84+583,2+98,57 = 805,61 V il che dimostra il grave errore che si commette sommando non vettorialmente!!!!!!!!!!!!!!**

IMPEDENZA				
FORMA BINOMIA	$R + j\cdot X_L$ $R + j\cdot \omega L$	$R - j\cdot X_C$ $R - j\cdot \frac{1}{\omega C}$	$0 + j\cdot\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ $0 \pm j\cdot X$	$R + j\cdot\left(X_L - X_C\right)$ $R + j\cdot\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$
MODULO (Z)	$\sqrt{R^2 + X_L{}^2}$ $\sqrt{R^2 + \omega L^2}$	$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $\sqrt{R^2 + X_C{}^2}$	$X_L - X_C$ $\omega L - \frac{1}{\omega C}$	$\sqrt{R^2 + X^2}$
ARGOMENTO (φ)	$tg\varphi = \frac{\omega L}{R} = \frac{X_L}{R}$	$tg\varphi = -\frac{\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{X_C}{R}$	$tg\varphi = \pm\infty$	$tg\varphi = \pm\frac{X}{R}$
RAPPRESENTAZIONE PIANO COMPLESSO				
TENSIONE	$\overline{V} = \overline{Z}\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \left(R + j\cdot X_L\right)\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L$	$\overline{V} = \overline{Z}\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \left(R - j\cdot X_C\right)\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_C$	$\overline{V} = \overline{Z}\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \pm j\cdot X\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \overline{V}_L + \overline{V}_C$	$\overline{V} = \overline{Z}\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \left(R \pm j\cdot X\right)\cdot\overline{I}$ $\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C$