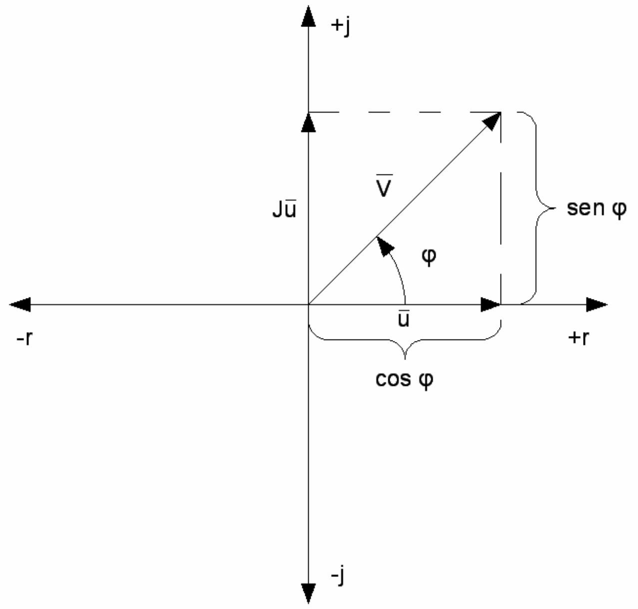
VETTORI E NUMERI COMPLESSI

Con l'algebra dei numeri reali resta impossibile risolvere diversi problemi come quello di trovare le radici dell'equazione $X^2 + 1 = 0$. Difatti essa ci dà $X^2 = -1$; $X = \pm\sqrt{-1}$ il che significa estrazione di radice quadrata da un numero negativo.

Allora si amplia il campo delle conoscenze matematiche, affiancando ai numeri reali ***i numeri complessi*** a cui si perviene partendo dalle nozioni di vettori.

Dato un vettore $\overline{V}$ si indichi con il simbolo **j** l'operazione che fa ruotare il vettore $\overline{V}$ di $\pi/2$ nel verso antiorario.



Quindi la scrittura $j\overline{V}$ indica il vettore $\overline{V}$ ruotato di $\pi/2$ nel verso antiorario. Si osservi allora che, detto $\overline{V}$ il vettore ottenuto da un vettore unitario **ū** mediante la rotazione di un angolo φ nel verso antiorario,le componenti di $\overline{V}$ secondo i vettori **ū** e **j ū** sono rispettivamente cosφ e senφ e quindi in base alla relazione vista $\overline{V} = V_x\,\mathbf{\bar{i}} + V_Y\,\mathbf{j}$ si ha $\overline{V}$ = cos φ **u** + sen φ **j ū** che si può scrivere :

$$\overline{V} = (\cos\varphi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathbf{\bar{u}}\ .$$

Questo modo di scrivere dimostra che il simbolo "cos φ + **j** sen φ" indica l' operazione che fa ruotare il vettore **ū** nel verso antiorario.

Si può osservare che la rotazione non modifica il modulo e che quindi il modulo di $\overline{V}$ è 1 come quello di **ū ;** pertanto se si vuole rappresentare un generico vettore di modulo ρ (reale e positivo) occorre moltiplicare $\overline{V}$ per ρ cioè ρ(cos φ + j sen φ) ū ;

il simbolo **ρ(cos φ + j sen φ) si dice *numero complesso ;* ρ si chiama *modulo* e φ si chiama** ***argomento***. Tale formula si dice **“ *forma trigonometrica* “** del numero complesso.

Se ora si pone $a = \rho \cos \varphi$ e $b = \rho \operatorname{sen} \varphi$ il numero complesso si scrive **a + j b** dove **a** si dice **parte reale, j b parte immaginaria; j è l’unità immaginaria e b il coefficiente dell’immaginario.**

Tale forma si dice **“ *forma algebrica* “.**

Dalle relazioni $a = \rho \cos \varphi$ e $b = \rho \operatorname{sen} \varphi$ elevando al quadrato ambo i membri e sommando si ottiene $a^2 + b^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)$ quindi $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ relazione che dà il modulo noti a e b. Inoltre $\cos \varphi = a/\rho$ e $\operatorname{sen} \varphi = b/\rho$ che danno l’argomento.

A tali formule si ricorre quando si richiede di mettere sotto forma trigonometrica un numero complesso dato in forma algebrica.

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

SOMMA:

“ La somma di due numeri complessi è un numero complesso che ha come parte reale la somma delle parti reali e come coefficiente dell’immaginario la somma dei coefficienti dell’immaginario”.

In altre parole “ per sommare due numeri complessi basta sommare ***algebricamente*** e ***separatamente*** le parti reali e le parti immaginarie.

Ad esempio : Eseguire la somma dei due numeri complessi : (6+j5) ; (4-j2) :

(6+j5) + (4-j2) = 6+j5+4-j2 = (6+4) + j(5-2) = 10 +j3.

DIFFERENZA:

“ per sottrarre due numeri complessi basta sottrarre *algebricamente* e *separatamente* le parti reali e le parti immaginarie”.

Ad esempio : Eseguire la differenza dei due numeri complessi : (6+j5) ; (4-j2) :

(6+j5) - (4-j2) = 6+j5-4+j2 = (6-4)+j(5+2) = 2+j7.

PRODOTTO:

“ Il prodotto di due numeri complessi è quel numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti ”

Per eseguire il prodotto di due numeri complessi occorre ricordare che ***l’unità immaginaria*** vale

$$j = \sqrt{-1}, \text{quindi } j \times j = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

mentre $j \times (-j) = \sqrt{-1} \times (-\sqrt{-1}) = -\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -(-1) = +1.$

Ad esempio : Eseguire il prodotto dei due numeri complessi : (6+j5) ; (4+j2) :

(6+j5) x (4+j2) = 6 x 4 + 6 x j2 + j5 x 4 + j5 x j2 = 14 + j32.

Ad esempio : Eseguire il prodotto dei due numeri complessi : (10-j4) ; (20+j25)

(10-j4) x (20+j25) = 300 + j170

QUOZIENTE:

“ Il quoziente si ottiene moltiplicando numeratore e il denominatore per il complesso coniugato del denominatore “

Ad esempio : Eseguire la divisione dei due numeri complessi : (10+j3) ; (4+j5)

$$\frac{10+j3}{4+j5} = \frac{(10+j3)x(4-j5)}{(4+j5)x(4-j5)} = \frac{55-j38}{4^2+5^2} = \frac{55-j38}{41} = \frac{55}{41} - j\,\frac{38}{41} = 1{,}34 - j0{,}93$$

Ad esempio : Eseguire la divisione dei due numeri complessi : (40+j32) ; (50-j10)

$$\frac{40+j32}{50-j10} = 0{,}646 + j0{,}769$$

- -

ESERCIZIO : Determinare il ***modulo*** e la ***fase*** del numero complesso3 + j 4.

Il vettore corrispondente al numero complesso (3+j4) ha il seguente modulo : $\sqrt{3^2+4^2}$ = 5;

la tangente della fase φ vale : tg φ = $\frac{4}{3}$ = 1,33 e la fase φ = arctg 1,33 = 53°08’

ESERCIZIO : Determinare il ***modulo*** e la ***fase*** del numero complesso3 - j 2.

Il vettore corrispondente al numero complesso (3-j2) ha il seguente modulo : $\sqrt{9+4}$ = 3,6;

la tangente della fase φ vale : tg φ = $\frac{-2}{3}$ = - 0,667 e la fase φ = arctg -0,667 = - 33°42’;

Il segno meno sta ad indicare che il vettore è “ sotto “ l’asse reale.

ESERCIZIO: Calcolare la somma, la sottrazione, il prodotto e la divisione dei due numeri complessi con modulo e fase: A = 2 – j 4 ; B = 3 + j 5.

Somma : C = A + B = 5 + j1	C = $\sqrt{5^2+2^2}$ = 5,1	φ = 11°,3’
Sottrazione : C = A – B = -1 – j9	C = $\sqrt{1+81}$ = 9,05	φ = 86°,3’
Prodotto : C = A x B = 26 – j2	C = 26,07,05	φ = -4°,4’
Divisione C = $\frac{A}{B} = \frac{2-j4}{3+j5}$ = - 0,41 –j0,64	C = 0,76	φ = 57°,3’
