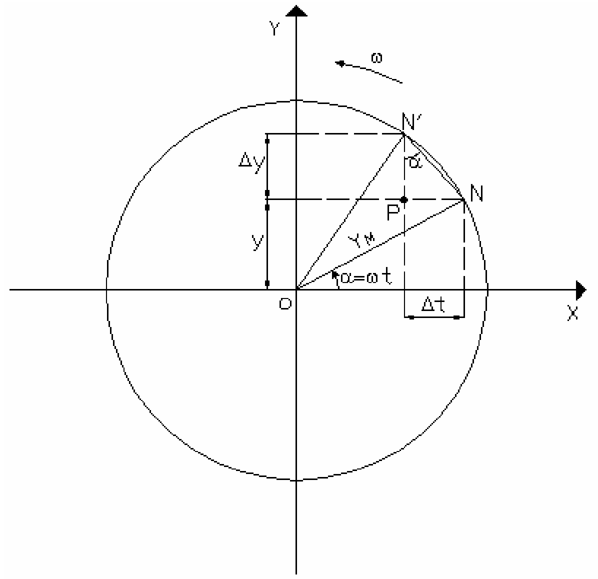
INDUTTANZA

Prima di parlare dell'induttanza dobbiamo analizzare l'espressione della DERIVATA DI UNA FUNZIONE SINUSOIDALE:

Si consideri la seguente figura:



Nell'istante generico t, il vettore rotante ON = Y_M forma l'angolo $\alpha = \omega t$ con l'ascissa OX ed assume il valore $y = Y_M$ sen ωt.
Dopo un tempuscolo Δt il punto N si è spostato su N'; di conseguenza il valore istantaneo y subisce l'incremento Δy. Si deduce:

$$\frac{\text{ARCO N N'}}{\Delta t} = \frac{\text{CIRCONF}}{\text{PERIODO}} = \frac{2\pi Y_M}{T} = 2\pi f Y_M = \omega Y_M$$

Dal triangolo rettangolo NPN' si ricava, identificando nella corda NN' la tangente nel punto N, come è possibile fare data la piccolezza dell'angolo:

$$\text{CORDA NN'} = \frac{N'P}{\cos\alpha} = \frac{\Delta y}{\cos \omega t}$$

Ed ancora, identificando nella predetta corda l'arco che la sottende, si avrà:

$$\text{arco NN'} = \frac{\Delta y}{\cos \omega t} = Y_M (\omega \Delta t)$$

$$\boxed{\text{da cui: } \frac{\Delta y}{\Delta t} = \omega Y_M \cos \omega t}$$

Al limite, per Δt tendente a zero, il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ è la derivata della funzione considerata rispetto al tempo e la si indica con dy/dt:

$$\frac{dy}{dt} = \omega Y_M \cos \omega t$$

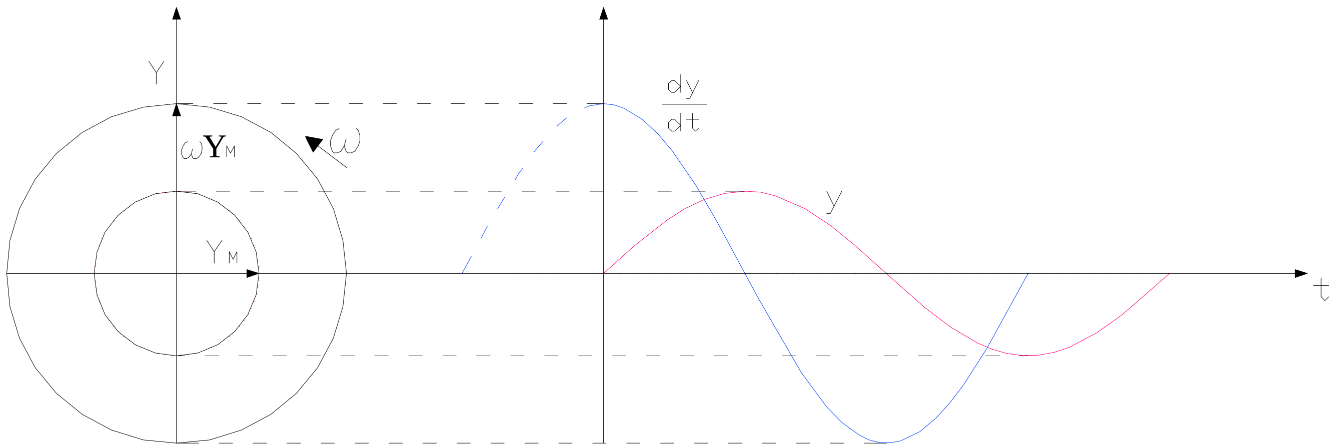
Studio d'ingegneria Dott.Ing. Piero Arona

Dato che il coseno di un angolo è uguale al seno dell'angolo che è più grande di $\frac{\pi}{2}$ [cioè: cos α = sen (α+π/2)], si avrà:

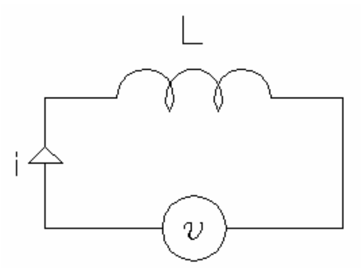
$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \omega\, Y_M \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

questa espressione dice che:

"La derivata di una funzione sinusoidale rispetto alla variabile t è una funzione sinusoidale, isofrequenziale di ampiezza ω volte maggiore, sfasata in anticipo di π/2".



INDUTTANZA



Se si alimenta il circuito induttivo L con una corrente sinusoidale di valore efficace I, sarà **Φ = L I** il flusso concatenato con il circuito. Ovviamente questo flusso sarà in fase con la corrente (se trascuro l'isteresi) e ha andamento sinusoidale.

Questo flusso variabile concatenato con il circuito di induttanza L vi induce una *f.e.m.*:

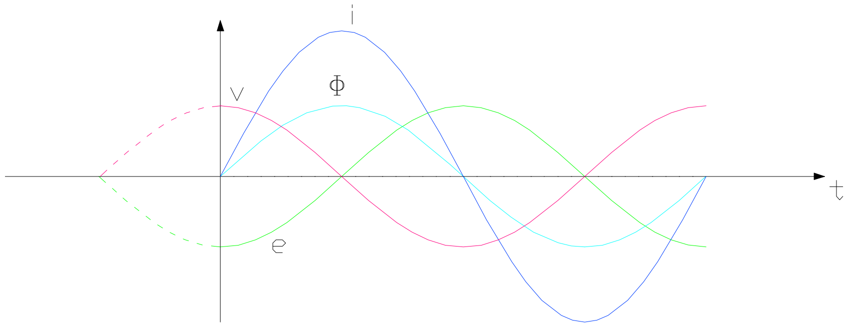
$$e = \frac{-d\phi_C}{dt} = \frac{-d(Li)}{dt} = -L\,\frac{di}{dt}, \quad \text{dato che } i = I_M \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

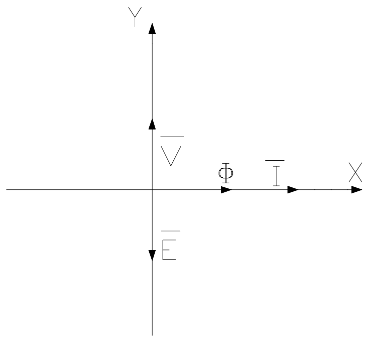
si ha, ricordando l'espressione della derivata di una funzione sinusoidale: $e = -L\,\frac{d(I_M \,\mathrm{sen}\,\omega t)}{dt}$ da cui

$e = -\omega\, L\, I_M \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \frac{\pi}{2})$ => **questa espressione, confrontata con quella della corrente, mi dice che la *f.e.m.* indotta:**

1) Varia con legge sinusoidale (con la stessa pulsazione della corrente);
2) È sfasata in quadratura in ritardo (a causa del segno negativo) sulla corrente;
3) Il valore massimo della *f.e.m.* indotta è => $E_M = - \omega L \cdot I_M$ e dividendo ambo i membri per $\sqrt{2}$ ottengo il valore efficace:

$$\boxed{\mathbf{E = \omega\, L\, I}}$$





Affinché la corrente possa permanere nel circuito induttivo, supposto di resistenza nulla si rende necessario applicare al circuito una tensione sinusoidale uguale, in ogni istante, alla *f.e.m* di autoinduzione ad essa in opposizione ($v = -e$).
Vettorialmente tale tensione viene rappresentata da un vettore $\overline{V}$ di ampiezza uguale al vettore $\overline{E}$ ma di verso opposto.

In definitiva: in un circuito puramente induttivo, la corrente I è in quadratura ritardo sulla tensione applicata oppure la tensione applicata è in quadratura in anticipo sulla corrente.

Dall'uguaglianza V = ωLI, posto ωL =X_L risulta:

$$\boxed{\mathbf{V = X_L I}}$$

Il fattore X_L (che sostituisce R) prende il nome di **REATTANZA INDUTTIVA** e si misura in **Ohm** (Ω) perché ha le stesse dimensioni della resistenza.
Il prodotto $X_L I$ misura dunque la caduta di tensione **INDUTTIVA**.
Ricapitolando, nella rappresentazione vettoriale la corrente è individuata da un vettore $\overline{I}$ sfasato in ritardo di π/2 rispetto alla tensione $\overline{V}$ e la sua ampiezza è legata a quella della tensione applicata dalla relazione:

$$I = \frac{1}{\omega L} V$$

Il termine $\frac{1}{\omega L}$ viene denominato **SUSCETTANZA INDUTTIVA**, si indica con il simbolo B_L e si misura in Siemens.

$$B_L = \frac{1}{\omega L}$$

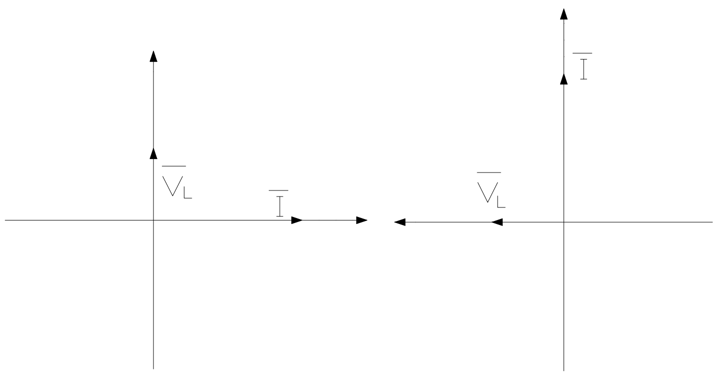
Con la notazione simbolica, poiché la $\bar{I}_L$ deve risultare di modulo $1/\omega L$ volte quello della tensione applicata $\overline{V}$ ed in ritardo sulla stessa di $\pi/2$, si scriverà:

$$\bar{I}_L = -j\,\frac{1}{\omega L}\,\overline{V}$$

Essendo j l'operatore che mi fa ruotare di 90°

$$\bar{I}_L = -j\,B_L\,\overline{V} \Rightarrow \bar{I}_L = -j\,\frac{1}{X_L}\,\overline{V}$$

Analogamente si avrà: $\overline{V} = jX_L\bar{I}$ oppure $\overline{V} = j\,\omega L\bar{I}$

L 		
Valore istantaneo	$v_L = \omega L\, I_M \operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$	
Valore efficace (Modulo)	$V_L = X_L I$; $V_L = \omega L I$	$I = \frac{V_L}{\omega L}$; $I = B_L V_L$; $I = \frac{V_L}{X_L}$
Rappresentazione vettoriale		
Relazione simbolica	$\overline{V_L} = j\,\omega L\bar{I} = jX_L\bar{I}$	$\bar{I} = -j\frac{1}{\omega L}\overline{V_L} = -j\,B_L\overline{V_L} = -j\frac{1}{X_L}\overline{V_L}$